29.02.16

$x \in A^\circ \Leftrightarrow (\exists r>0)\, B(x,r) \subseteq A \Leftrightarrow (\exists U(x)) : U(x) \subseteq A$
$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\forall r>0)\, B(x,r) \cap A \neq \varnothing \Leftrightarrow (\forall U(x))\, U(x) \cap A \neq \varnothing$
$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) $A^{\circ\circ} = A^\circ$ i') $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ii') $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Απόδειξη

i) Ισχύει $A^\circ \subseteq A \Longrightarrow A^{\circ\circ} \subseteq A^\circ$

αφού ο πυρήνας διατηρεί τη σχέση του υποσυνόλου

Αρκεί ν.δ.ο. $A^\circ \subseteq A^{\circ\circ}$ (με $A^{\circ\circ}$ εννοούμε $(A^\circ)^\circ$)
Έστω x τυχόν : $x \in A^\circ \Leftrightarrow (\exists r>0)\, B(x,r) \subseteq A$

Αν $B(x,r) \subseteq A \Rightarrow B(x,r) \subseteq A^\circ$, $(*)$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (\exists r>0)\, B(x,r) \subseteq A^\circ$
$\Rightarrow x \in A^{\circ\circ}$.

Μένει ν'αποδείξουμε την $(*)$.
Θεωρούμε y τυχόν : $y \in B(x,r)$
Τότε $B(x,r) = U(y)$ → αφού κάθε σφαίρα είναι περιοχή παντός σημείου της
Όμως $B(x,r) \subseteq A$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow U(y) \subseteq A$
$\Rightarrow y \in A^\circ$

Επίσης, με τον τρόπο αυτό βγαίνει και το εξής συμπέρασμα:

$$(B(x,r))^\circ = B(x,r)$$

Θα το αποδείξουμε αργότερα.

(i') Ισχύει $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$

Τότε η θήκη διατηρεί τη σχέση του υποσυνόλου

Αρκεί ν.δ.ο. $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$.

Θεωρώ τυχόν x: $x \in \bar{\bar{A}} \iff (\forall r>0)\ B(x,r) \cap \bar{A} \neq \emptyset$

Έστω $y \in B(x,r) \cap \bar{A} \neq \emptyset \Rightarrow y \in B(x,r) \land y \in \bar{A}$

δηλ. ίδια σκέψη με πριν $\quad \xrightarrow[B(x,r) \text{ περιοχή του } y]{B(x,r) = U(y)} U(y) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall r>0)$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

(ii) Παρατηρούμε ότι : $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ } γνωστό από θεωρία συνόλων

Συνεπώς, παίρνουμε:

$A \cap B \subseteq A \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$

$A \cap B \subseteq B \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$

$\Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

Αρκεί ν.δ.ο. $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

x τυχόν: $x \in A^\circ \cap B^\circ \iff x \in A^\circ \land x \in B^\circ$

$\iff \left[(\exists U(x))\ U(x) \subseteq A\right] \land \left[(\exists V(x))\ V(x) \subseteq B\right]$

είχαμε αποδείξει ότι η τομή περιοχών είναι και αυτή περιοχή $\quad \xrightarrow{W(x) = U(x) \cap V(x)} (\exists W(x))\ W(x) \subseteq A \land W(x) \subseteq B$

$\Rightarrow (\exists W(x))\ W(x) \subseteq A \cap B$

$\Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ$

Παρατήρηση: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A}$, $A \cap B \subseteq B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{B}$ } $\Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ $\not\supseteq$

Για τη θήκη με την τομή ισχύει μόνο αυτή η σχέση, και όχι η ισότητα

(ιι') $A \subseteq A\cup B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{A\cup B}$
$B \subseteq A\cup B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$ $\Big\} \Rightarrow \bar{A}\cup\bar{B} \subseteq \overline{A\cup B}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\overline{A\cup B} \subseteq \bar{A}\cup\bar{B}$, (*).
Έστω ότι δεν ισχύει η (*). (θα καταλήξουμε σε άτοπο)
Τότε $(\exists x)\ x\in\overline{A\cup B}$ και $x\notin \bar{A}\cup\bar{B}$

$x\notin \bar{A}\cup\bar{B} \Leftrightarrow x\notin\bar{A} \wedge x\notin\bar{B}$
$\Leftrightarrow [\sim x\in\bar{A}] \wedge [\sim x\in\bar{B}]$ (1)

$\sim x\in\bar{A} \Leftrightarrow \sim[(\forall U(x))\ U(x)\cap A\neq\emptyset]$
$\Leftrightarrow (\exists U(x))\ U(x)\cap A=\emptyset$

(1) $\Leftrightarrow [(\exists U(x))\ U(x)\cap A=\emptyset] \wedge [(\exists V(x))\ V(x)\cap B=\emptyset]$

$\xrightarrow{W(x)=U(x)\cap V(x)} (\exists W(x))\ W(x)\cap A=\emptyset \wedge W(x)\cap B=\emptyset$

$\Rightarrow (\exists W(x))\ W(x)\cap(A\cup B)=\emptyset$
$\Rightarrow x\notin\overline{A\cup B}$ ↯ γιατί υποθέσαμε $x\in\overline{A\cup B}$

Παρατήρηση: $A\subseteq A\cup B \Rightarrow A^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$
$B\subseteq A\cup B \Rightarrow B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$ $\Big\} \Rightarrow A^\circ\cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$

Άρα, καταλήξαμε και στις σχέσεις: $\begin{cases} \overline{A\cap B} \subseteq \bar{A}\cap\bar{B} \\ A^\circ\cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ \end{cases}$
από την παρατήρηση αυτή
και την προηγούμενη παρατήρηση

$a \in E$ π.χ. , $A \subseteq E$

ΟΡΙΣΜΟΣ a σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του $A \iff (\forall r>0)\ \underline{B}(a,r)\cap A \neq \emptyset$

όπου $\underline{B}(a,r) = B(a,r) - \{a\}$: κατ' εκδοχή σφαιρική περιοχή
↳ δηλ. η σφαιρική περιοχή <u>χωρίς</u> το κέντρο της

ΟΡΙΣΜΟΣ $A' \equiv$ σύνολο των σ.σ. του A (A^d)

Παρατηρούμε ότι μεταξύ σ.σ. και σημείων επαφής θα υπάρχει μια σχέση. Η σχέση αυτή είναι:

$\underline{B}(a,r) \subseteq B(a,r) \Rightarrow \underline{B}(a,r)\cap A \subseteq B(a,r)\cap A$
$\Rightarrow A' \subseteq \overline{A}$

εφαρμόσαμε ότι αν το μικρότερο $\neq \emptyset$ τότε και το μεγαλύτερο $\neq \emptyset$

δηλ. αν ένα σημείο είναι σ.σ. <u>τότε</u> θα είναι και σημείο επαφής.
(το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει:
αντιπαράδειγμα:

$A = (0,1)\cup\{2\}$

για $B(2,r) = (2-r,\ 2+r)$

άρα: $2 \in B(2,r)\cap A \neq \emptyset$
$\xrightarrow{\forall r} 2 \in \overline{A}$

Το 2 όμως δεν είναι σσ γιατί υπάρχει σφαιρική περιοχή $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$ για την οποία ισχύει $B\left(2,\frac{1}{2}\right)\cap A = \emptyset$

$\Rightarrow 2 \notin A'$

Σ' αυτή την περίπτωση, το σημείο καλείται <u>μεμονωμένο</u>)

ΠΡΟΤΑΣΗ $a \in A' \iff$ Τυχαία περιοχή του a περιέχει άπειρα σημεία του A.

Τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σ.σ.

Απόδειξη

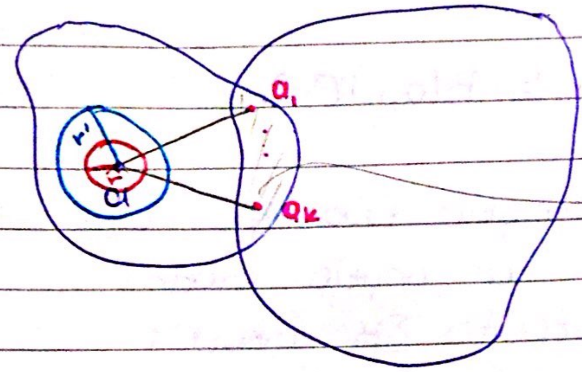
$(\Longrightarrow)$

Έστω $a \in A'$ και υπάρχει περιοχή $U(a)$ του a, περιέχουσα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του A

→ δηλ. υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, άρα θα ισχύει η άρνησή του.

Ας είναι αυτά $a_1, a_2, \dots, a_k$.

δηλ. τα κοινά σημεία του συνόλου και της περιοχής, όπου υποθέτουμε ότι δεν ανήκει το a.



→ μόνο αυτά είναι εκεί μέσα

Παίρνουμε τις αποστάσεις $\rho(a,a_1), \rho(a,a_2), \dots, \rho(a,a_k)$.
Αφού είναι πεπερασμένοι θετικοί αριθμοί μπορώ να θεωρήσω το ελάχιστό τους

$$\min\{\rho(a,a_1), \dots, \rho(a,a_k)\}$$

και να πάρω ένα r μικρότερο από αυτό, δηλ.

$$\min\{\rho(a,a_1), \dots, \rho(a,a_k)\} > r$$

$U(a)$ περιοχή του $a \Rightarrow (\exists r'>0)\ B(a,r') \subseteq U(a)$

Θεωρούμε $\hat{r} < \min\{r, r'\}$ → Το παίρνουμε $<$ για να μην περιέχει τα $a_1, \dots, a_k$ και για να περιέχεται στο $U(a)$.

⇓

Δεν παίρνουμε r' γιατί μπορεί να περιέχει κάποιο a_i.

Άρα: $B(a, \hat{r}) \cap A = \emptyset \Rightarrow a \notin A'$ ↯

$(\Leftarrow)$

Εστω ότι ισχύει το συμπέρασμα, δηλ. θεωρούμε $B(a,r)$ τυχούσα σφαιρική περιοχή του a.

Τότε η $B(a,r)$ περιέχει άπειρα στοιχεία του A.

Άρα και η $\underline{B}(a,r)$ περιέχει άπειρα σημεία του A

$\Rightarrow \underline{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \in A'$

$a \in E$ μχ και $A \subseteq E$

ΟΡΙΣΜΟΣ a εξωτερικό σημείο του A $\Leftrightarrow$ a δεν είναι εσωτερικό σημείο $\Leftrightarrow a \notin A^\circ$

ΛΑΘΟΣ !

Προσοχή να μην το γράψω στην εξέταση !

$a \in E$ μχ και $A \subseteq E$

ΟΡΙΣΜΟΣ a εξωτερικό σημείο του A $\Leftrightarrow a \in (A^c)^\circ$

$ext A = (A^c)^\circ = (\bar{A})^c$: το σύνολο των εξωτερικών σημείων του A

ΟΡΙΣΜΟΣ a συνοριακό σημείο του A $\Leftrightarrow$ a δεν είναι εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του A

$\partial A \equiv$ σύνολο των συνοριακών σημείων του A (ή και $bd A$)

και μάλιστα
$$\begin{aligned}\partial A &= (A^\circ)^c \cap (ext A)^c \\ &= (A^\circ)^c \cap [(\bar{A})^c]^c \\ &= (A^\circ)^c \cap \bar{A} \\ &= \overline{A^c} \cap \bar{A} \\ &= \bar{A} \cap \overline{A^c}\end{aligned}$$
δηλ. το σύνορο είναι η τομή δύο κλειστών

επίσης,
$$\begin{aligned}\partial A &= \bar{A} \cap (A^\circ)^c \\ &= \bar{A} - A^\circ\end{aligned}$$
η πιο διαδεδομένη μορφή του συνόρου (παραστατική εικόνα του συνόρου)

ακόμη μια μορφή είναι : $\partial A = \bar{A}^c - extA$

ΠΡΟΤΑΣΗ

i) $A' \subseteq \bar{A}$

ii) $\bar{A} = A \cup A'$

iii) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$

iv) $\partial A = \partial A^c$

v) $\partial A = \overline{\partial A}$

Απόδειξη

i) Την αιτιολογήσαμε προηγουμένως (λίγο πιο κάτω από τον ορισμό του σ.σ.)

ii) $A \subseteq \bar{A}$ και $A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A \cup A' \subseteq \bar{A}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\bar{A} \subseteq A \cup A'$

Έστω α τυχόν : $a \in \bar{A}$

Τότε $a \in A$ ή $a \notin A$

Αν $a \in A$, τότε $a \in A \cup A'$

Αν $a \notin A$, τότε για κάθε $r > 0$ έχουμε:

$\underbrace{\varphi \neq B(a,r) \cap A}_{\text{γιατί } a \in \bar{A}} \xrightarrow{a \notin A} \underline{B}(a,r) \cap A$

Άρα και $\underline{B}(a,r) \cap A \neq \varphi \xrightarrow{r \text{ τυχόν}} a \in A'$

δηλ. $a \in A \cup A'$.

Συνεπώς για κάθε περίπτωση $a \in A \cup A' \Rightarrow \bar{A} \subseteq A \cup A'$.

iii) $A^\circ \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A^\circ \cup (\bar{A} - A^\circ)$

αφού

$X \subseteq Y \Rightarrow X = X \cup (Y - X)$ από θεωρία συνόλων

$\Rightarrow \bar{A} = A^\circ \cup \partial A$

αφού $\partial A = \bar{A} - A^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \\ \underbrace{\partial A \subseteq \bar{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup \partial A \subseteq \bar{A}$$

επειδή $\partial A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$ δηλ. ∂A είναι υποσύνολο από το καθένα από αυτά

Αρκεί νδο $\bar{A} \subseteq A \cup \partial A$ H/W η συνέχεια
Έστω $x \in \bar{A} \Rightarrow \ldots$

iv) $\partial(A^c) = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c} = \overline{A^c} \cap \bar{A} = \partial A$

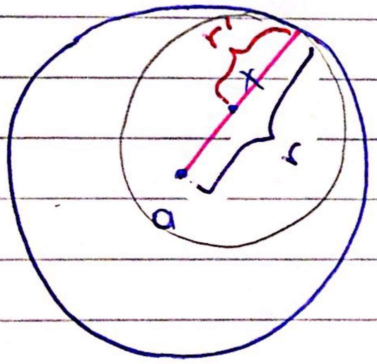
v) $\overline{\partial A} = \overline{\bar{A} \cap \overline{A^c}} \subseteq \bar{\bar{A}} \cap \overline{\overline{A^c}} = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$ $\qquad \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

το βρήκαμε πριν

και πάντα ισχύει: $\partial A \subseteq \partial \bar{A}$
οπότε καταλήγουμε στην ισότητα.

Πάμε τώρα να δούμε τη σχέση $\left(B(a,r)\right)^\circ = B(a,r)$ την οποία αναφέραμε νωρίτερα.

Απόδειξη 1η



Αρκεί ν.δ.ο. $B(a,r) \subseteq (B(a,r))^\circ$.
(γιατί ξέρω ότι πάντα ο πυρήνας είναι υποσύνολο του συνόλου)

$B(x,r')$
$r' = r - \rho(a,x)$

$x \in B(a,r) \xRightarrow{\ldots} x \in (B(a,r))^\circ$

Στις ... βάλαμε την υπόλοιπη απόδειξη που είχαμε δει σε προηγούμενο μάθημα

Απόδειξη 2η
Έστω $x \in B(a,r)$. Τότε η $B(a,r)$ είναι περιοχή του x.
Δηλ. μπορώ να θέσω $B(a,r) = U(x)$.
Άρα,
$U(x) \subseteq B(a,r) \Rightarrow x \in (B(a,r))^\circ$